

文章编号: 1000-7598-(2008) 05-1164-05

正交各向异性剪切屈服准则研究及其数值实现

徐卫亚^{1,2}, 张贵科^{1,2}

(1. 岩土力学与堤坝工程教育部重点实验室, 南京 210098; 2. 河海大学 岩土工程科学研究所, 南京 210098)

摘 要: 以各向同性 Mohr-Coulomb 剪切屈服准则为基础, 研究了各向异性剪切屈服准则的一般理论方法。在此基础上, 对正交各向异性的剪切屈服准则及其数值实现方法进行了研究, 利用 FLAC^{3D} 数值分析软件中的 FISH 语言编制了相应的计算程序, 并引入 FLAC^{3D} 中。理论分析和数值计算分析表明, 正交各向异性剪切屈服准则与 3 个主应力均有关, 各向同性剪切屈服准则为其特例, 各向异性材料的屈服面不一定与最大剪应力面重合。

关 键 词: 正交各向异性; 剪切屈服准则; Mohr-Coulomb 准则; 数值分析

中图分类号: TB 115

文献标识码: A

Study on orthotropic shear yield criterion and its numerical implementation

XU Wei-ya^{1,2}, ZHANG Gui-ke^{1,2}

(1. Key Laboratory of Ministry of Education for Geomechanics and Embankment Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China ;

2. Institute of Geotechnical Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: The theory and methods of anisotropic shear yield criterion is studied on the basis of isotropic Mohr-Coulomb yield criterion. The above theory and methods are applied to establish orthotropic shear yield criterion and to analyze the way to introduce it into the numerical analysis. In order to introduce the orthotropic shear yield criterion into FLAC^{3D}, the codes are developed by using the FISH language of FLAC^{3D}. Theoretical analysis and numerical analysis indicate that the orthotropic shear yield criterion is related to 3 principal stresses and the isotropic shear yield criterion is a special case of the orthotropic shear yield criterion. The analysis also shows that the maximum shear stress plane can not be the same of yield plane in orthotropic materials.

Key words: orthogonal anisotropy; shear yield criterion; Mohr-Coulomb yield criterion; numerical analysis

1 前 言

岩体等天然工程材料中存在着数量众多、分布复杂的节理裂隙等缺陷, 因此存在着明显的各向异性。从理论上讲, 以均匀、连续、各向同性假设为基础的经典弹塑性力学并不能正确反映岩体的变形和破坏情况, 为更准确地分析岩体变形与屈服破坏行为, 合理评价岩体工程的安全稳定性, 有关学者对各向异性屈服准则进行了研究。

在当前数学和力学等学科发展水平条件下, 研究一般意义下的各向异性屈服准则十分困难, 因此, 目前主要是研究横观各向同性和正交各向异性两种特殊条件下的屈服准则。Jaeger (1960 年) 针对岩体沿节理面滑动破裂首次提出了相应的横观各向同性屈服准则^[1], 后来很多学者也在横观各向同

性岩体的屈服准则方面进行了大量的研究, 这些研究大多都是对 Jaeger 准则的补充和修正^[2-8]。近年来, 国内外不少学者运用损伤力学和张量数学理论对岩体各向异性及其相应屈服准则进行了研究^[9-11], 根据岩体损伤张量理论分析, 二阶损伤张量可以精确描述具有 3 组正交节理岩体的各向异性, 对一般非正交节理裂隙则需要用更高阶张量来描述^[12, 13]。

本文从经典 Mohr-Coulomb 剪切屈服准则出发, 研究了各向异性剪切屈服的基本理论, 并重点对正交各向异性剪切屈服准则及其数值实现方法进行了研究。最后, 利用 FLAC^{3D} 数值分析软件中的 FISH 语言编制了相应的计算程序, 将正交各向异性剪切屈服准则引入 FLAC^{3D} 中, 并通过数值算例验证了其正确性。理论分析和数值模拟算例研究表明, 正交各向异性剪切屈服准则与 3 个主应力均有关,

收稿日期: 2006-07-06

基金项目: 国家自然科学基金重点项目 (No. 50539110) 资助。

作者简介: 徐卫亚, 男, 1962 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 从事岩石力学与工程教学与研究。E-mail: wyxu@hhu.edu.cn

最可能的屈服面并不一定与最大剪应力面重合, 经典的各向同性 Mohr-Coulomb 准则是正交各向异性准则的一个特例。

2 各向异性屈服准则基本理论

经典 Mohr-Coulomb 屈服准则是当前岩土工程强度准则的基础, 其他常用屈服准则都是对其空间屈服面的不同方式的光滑拟合。对各向同性材料, Mohr-Coulomb 屈服函数为

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \vec{N}) = -f\sigma_N + c - \tau_N \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\sigma}$ 为应力张量; $\vec{N}(l, m, n)$ 为考察截面的单位法向量; f 为摩擦系数; c 为凝聚力; σ_N 和 τ_N 分别为截面上的正应力 (正应力以拉为正) 和剪应力值 (剪应力向量的模值), 均为 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\vec{N}$ 的函数。

相应地, Mohr-Coulomb 剪切屈服准则为

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \vec{N}) = 0 \quad (2)$$

由式 (2) 可知, 材料进入屈服状态的临界条件是: 在所有空间截面 (法向量为 $\vec{N}$) 中屈服函数的最小值等于 0, 即

$$\min_{|\vec{N}|=1} [H(\boldsymbol{\sigma}, \vec{N})] = 0 \quad (3)$$

在各向同性材料中, f 和 c 值为与 $\vec{N}$ 无关的常数, 空间各截面上的抗剪能力均相等, 屈服函数最小值只能出现在最大剪应力面上, 此时屈服准则可表示为

$$-\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} f + c - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sqrt{1 + f^2} = 0 \quad (4)$$

式中: σ_1 和 σ_3 分别为当前应力状态下的最大和最小主应力。

在各向异性材料中, 由于 f 和 c 值为 $\vec{N}$ 的函数, 各空间截面上的抗剪能力并不相同, 屈服面不仅与空间截面上的剪应力值有关, 而且还与该截面的法向量 $\vec{N}$ 有关, 因此剪切屈服面不一定与最大剪应力面重合。

设以单位向量 $\vec{N}(l, m, n)$ 为法向量的截面上的 c 和 f 值分别为 c_N 和 f_N , 则有

$$\left. \begin{aligned} c_N &= G(l, m, n, c_1, c_2, \dots, c_n); \\ f_N &= F(l, m, n, f_1, f_2, \dots, f_n) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: $c_1, c_2, \dots, c_n$ 为凝聚力的 n 个特征主值; $f_1, f_2, \dots, f_n$ 为摩擦系数的 n 个特征主值。

将式 (5) 代入式 (1), 即得到各向异性屈服函数:

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \vec{N}) = -f_N \sigma_N + c_N - \tau_N \quad (6)$$

再由式 (3) 可知, 各向异性屈服准则即是在约束条件 $|\vec{N}|=1$ 下求式 (6) 的最小值, 可采用 Lagrange 乘数法来求解, 设 λ 为 Lagrange 乘数, 令

$$Q = -f_N \sigma_N + c_N - \tau_N + \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1) \quad (7)$$

则该极值问题转化为求解以下方程组:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial l} &= -\frac{\partial f_N}{\partial l} \sigma_N - f_N \frac{\partial \sigma_N}{\partial l} + \frac{\partial c_N}{\partial l} - \frac{\partial \tau_N}{\partial l} + 2\lambda l = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial m} &= -\frac{\partial f_N}{\partial m} \sigma_N - f_N \frac{\partial \sigma_N}{\partial m} + \frac{\partial c_N}{\partial m} - \frac{\partial \tau_N}{\partial m} + 2\lambda m = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial n} &= -\frac{\partial f_N}{\partial n} \sigma_N - f_N \frac{\partial \sigma_N}{\partial n} + \frac{\partial c_N}{\partial n} - \frac{\partial \tau_N}{\partial n} + 2\lambda n = 0; \\ \frac{\partial Q}{\partial \lambda} &= l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由式 (8) 求出屈服函数最小值所对应的截面法向量 $\vec{N}_0(l_0, m_0, n_0)$, 再代入式 (2) 即得到各向异性剪切屈服准则。

3 正交各向异性屈服准则研究

3.1 正交各向异性屈服准则建立

由于岩体等真实各向异性材料的 c 和 f 参数的空间变化规律相当复杂, 无法用显式的表达式来描述, 本文仅对 c 和 f 参数在空间为正交各向异性变化时屈服准则进行研究。此时, c 和 f 参数的空间变化轨迹为椭球面 (图 1), 任意方向 $\vec{N}$ 上的 c_N 值可由椭球面 3 个主轴单位向量 $\vec{N}_{1c}$ 、 $\vec{N}_{2c}$ 、 $\vec{N}_{3c}$ 和 3 个主值 c_1 、 c_2 、 c_3 来计算。同理, f_N 可以由 3 个主轴单位向量 $\vec{N}_{1f}$ 、 $\vec{N}_{2f}$ 、 $\vec{N}_{3f}$ 和 3 个主值 f_1 、 f_2 、 f_3 来计算^[14]。

计算整体坐标 X - Y - Z 下单位向量 $\vec{N}$ 方向所对应的 c_N 和 f_N 值, 需进行坐标系的变换, 如图 2 所示, 整体坐标系 X - Y - Z 与局部坐标系 $\vec{N}_1$ - $\vec{N}_2$ - $\vec{N}_3$, α 、 β 和 γ 为坐标变换角, 则有

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma; \\ m_1 &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma; \\ n_1 &= -\sin \alpha \cos \gamma; \\ l_2 &= \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma; \\ m_2 &= \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma; \\ n_2 &= -\sin \alpha \sin \gamma; \\ l_3 &= \sin \alpha \sin \beta; \\ m_3 &= \sin \alpha \cos \beta; \\ n_3 &= \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中: l_i 、 m_i 和 n_i 分别为局部坐标轴单位向量 $\vec{N}_i$ 在 x 、 y 和 z 方向上的分量 ($i=1, 2, 3$)。

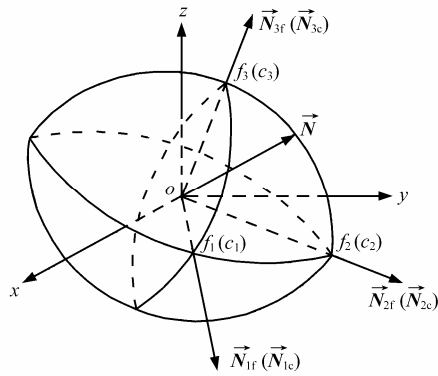


图1 摩擦系数(凝聚力)椭球面
Fig.1 Elliptical surface of friction factor (cohesion)

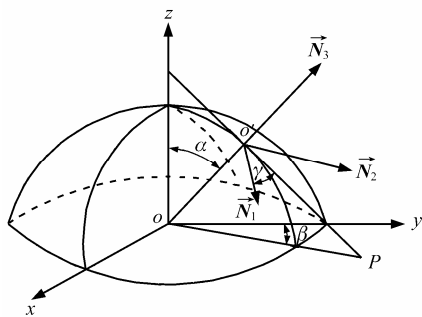


图2 整体坐标系与局部坐标系变换关系
Fig.2 Relation of global coordinate system and local coordinate system

利用式(9),可以得到 c 和 f 参数的3个主轴坐标系与整体坐标系的变换矩阵分别为

$$[B]_c = \begin{bmatrix} l_{1c} & m_{1c} & n_{1c} \\ l_{2c} & m_{2c} & n_{2c} \\ l_{3c} & m_{3c} & n_{3c} \end{bmatrix}; [B]_f = \begin{bmatrix} l_{1f} & m_{1f} & n_{1f} \\ l_{2f} & m_{2f} & n_{2f} \\ l_{3f} & m_{3f} & n_{3f} \end{bmatrix} \quad (10)$$

式中: l_{ic} 、 m_{ic} 和 n_{ic} 分别为主轴单位向量 $\vec{N}_{ic}$ 在 x 、 y 和 z 方向上的分量; l_{if} 、 m_{if} 和 n_{if} 分别为主轴单位向量 $\vec{N}_{if}$ 在 x 、 y 和 z 方向上的分量, $i=1, 2, 3$ 。

利用 c 和 f 参数的坐标变换矩阵,可以将整体坐标系下的向量 $\vec{N}$ 分析变换为 c 和 f 主轴坐标系下的向量 $\vec{N}_c$ 和 $\vec{N}_f$:

$$\vec{N}_c = [B]_c \vec{N}^T; \vec{N}_f = [B]_f \vec{N}^T \quad (11)$$

最后可以得到 c_N 和 f_N 值的计算式:

$$\left. \begin{aligned} c_N &= \sqrt{(c_1 l_c)^2 + (c_2 m_c)^2 + (c_3 n_c)^2}; \\ f_N &= \sqrt{(f_1 l_f)^2 + (f_2 m_f)^2 + (f_3 n_f)^2} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式中: l_c 、 m_c 和 n_c 分别为单位向量 $\vec{N}_c$ 在 x 、 y 和 z 方向上的分量; l_f 、 m_f 和 n_f 分别为单位向量 $\vec{N}_f$ 在 x 、 y 和 z 方向上的分量。

将式(12)代入式(7),由式(8)求得屈服函数最小值所对应的向量 $\vec{N}_0(l_0, m_0, n_0)$,再代入式(2)即得到正交各向异性剪切屈服准则。

3.2 主应力坐标系下正交各向异性准则讨论

取3个主应力轴坐标系为整体坐标系,对正交各向异性屈服准则进行研究,此时

$$\left. \begin{aligned} \sigma_N &= l^2 \sigma_1 + m^2 \sigma_2 + n^2 \sigma_3; \\ \tau_N &= \sqrt{l^2 \sigma_1^2 + m^2 \sigma_2^2 + n^2 \sigma_3^2 - (\sigma_N)^2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(1) 当 $c_1 = c_2 = c_3 = c$ 且 $f_1 = f_2 = f_3 = f$ 时

将 $c_1 = c_2 = c_3 = c$ 且 $f_1 = f_2 = f_3 = f$ 代入式(12)可知: $c_N = c$, $f_N = f$ 。将式(13)及 $c_N = c$, $f_N = f$ 代入式(8),化简后得

$$\left. \begin{aligned} [(-2f\tau_N - \sigma_1 + 2\sigma_N)\sigma_1 + 2\lambda\tau_N]l &= 0; \\ [(-2f\tau_N - \sigma_2 + 2\sigma_N)\sigma_2 + 2\lambda\tau_N]m &= 0; \\ [(-2f\tau_N - \sigma_3 + 2\sigma_N)\sigma_3 + 2\lambda\tau_N]n &= 0; \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

根据相关的数学和力学理论对式(14)进行讨论认为:只有当 l 、 m 和 n 中有一个为0,另两个不为0时屈服函数取最小值。由Mohr应力圆分析可知,剪切强度外包络线只与 σ_1 和 σ_3 有关(图3),因此必有 $m=0$,此时式(14)化为

$$\left. \begin{aligned} (-2f\tau_N - \sigma_1 + 2\sigma_N)\sigma_1 + 2\lambda\tau_N &= 0; \\ (-2f\tau_N - \sigma_3 + 2\sigma_N)\sigma_3 + 2\lambda\tau_N &= 0; \\ l^2 + n^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由Mathematica软件,可以求得

$$l = \sqrt{\frac{\sqrt{1+f^2}+f}{2\sqrt{1+f^2}}}; n = \sqrt{\frac{\sqrt{1+f^2}-f}{2\sqrt{1+f^2}}} \quad (16)$$

将式(16)及 $m=0$ 代入式(2)化简即可得到式(4),表明当 $c_1 = c_2 = c_3 = c$ 且 $f_1 = f_2 = f_3 = f$ 时,正交各向异性屈服准则则退化为各向同性屈服准则。

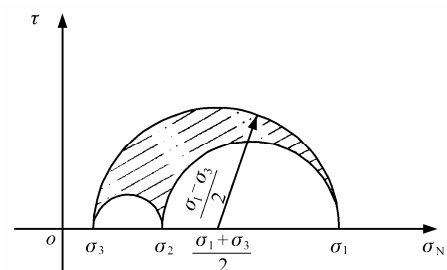


图3 Mohr应力圆
Fig.3 Mohr stress circle

(2) 当 c_1, c_2, c_3 和 f_1, f_2, f_3 不全相等时

当 f 和 c 的 3 个主值不全相等时, 方程组式(8)变得异常复杂, 无法直接求解得到相应的 l, m, n 的显解, 也无法得到屈服准则的显式表达式。

4 正交各向异性屈服准则数值实现

为将正交各向异性屈服准则引入 FALC^{3D} 软件中, 笔者研究了正交各向异性屈服准则的数值实现方法, 其基本思路是:

①在空间极坐标下, 将单位向量 $\vec{N}(l, m, n)$ 用两个独立极角 ϕ 和 θ 来表示:

$$\left. \begin{aligned} l &= \sin \phi \cos \theta; \\ m &= \sin \phi \sin \theta; \\ n &= \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: $\phi \in [0, \pi]$; $\theta \in [0, 2\pi]$ 。

②将 ϕ 和 θ 在其取值区间内分别按间距 $\Delta\phi$ 和 $\Delta\theta$ 均匀划分为 n_ϕ 和 n_θ 个子区间, 共生成 $(n_\phi + 1)n_\theta$ 组 ϕ 和 θ 的组合 (ϕ_i, θ_j) , 其中 $i = 1, 2, \dots, n_\phi + 1$, $j = 1, 2, \dots, n_\theta$ 。

③对每一组 (ϕ_i, θ_j) 的组合, 先按式(17)计算其所对应的空间向量 $\vec{N}$, 然后计算 $\vec{N}$ 所对应的 c_N 和 f_N 以及 σ_N 和 τ_N , 最后按式(1)计算 $\vec{N}$ 所对应的屈服函数值 $H(\sigma, \phi_i, \theta_j)$ 。

④在所有的屈服函数值 $H(\sigma, \phi_i, \theta_j)$ 值中, 取屈服函数最小值所对应的 $(\phi_i^{\min}, \theta_j^{\min})$ 作为式(8)的近似解。

⑤利用“变参数法”思想, 将 $(\phi_i^{\min}, \theta_j^{\min})$ 所对应的 c 和 f 值作为当前应力状态下岩体的抗剪强度参数。

⑥在数值分析计算中, 对每一个单元均进行①~⑤步的计算, 然后在新的应力状态下, 重复上述过程, 直至整个数值模型求解达到稳定或剪切破坏。

根据以上思路, 利用 FLAC^{3D} 软件中的 FISH 语言编制了相应的正交各向异性屈服准则计算程序。在正交各向异性屈服准则数值实现过程中, 计算精度受 $\Delta\phi$ 和 $\Delta\theta$ 控制, 所取的区间间隔越小, 则计算精度越高, 但计算量增大, 计算耗时延长。

5 计算实例

为了验证正交各向异性屈服准则及其数值实现程序的正确性, 利用 FLAC^{3D} 软件进行了数值算例分析, 取边长 $6\text{ m} \times 6\text{ m} \times 6\text{ m}$ 的均匀连续立方体岩体模型, 将岩体模型离散成为 27 个 $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 2\text{ m}$

的立方体单元模型。为便于控制应力状态, 不考虑自重影响, 单元受力状态完全由边界外表面上施加的平衡力系决定。为便于计算, 假定岩体凝聚力和摩擦系数的椭球面主轴重合(坐标系变换角均为 α, β, γ), 按正交各向异性屈服准则对岩体进行数值分析。数值算例的主要材料参数如下: 坐标变换角 $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$; 凝聚力主值 $c_1 = 1.5\text{ MPa}$, $c_2 = 1.0\text{ MPa}$, $c_3 = 0.5\text{ MPa}$; 摩擦系数主值 $f_1 = 1.0$, $f_2 = 0.8$, $f_3 = 0.4$; 计算精度控制参数 $\Delta\phi = \Delta\theta = 10^\circ$; 岩体弹性模量 $E = 10\text{ GPa}$; 岩体泊松比 $\mu = 0.26$ 。

为对比不同受力状态对数值模型剪切屈服情况的影响, 设计了以下两种外力荷载工况, 见表 1。

表 1 两种工况的外力荷载

工况	σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
1	-1.0	-1.0	-3.3	-0.5	-0.5	-0.5
2	-3.3	-1.0	-1.0	-0.5	-0.5	-0.5

对两种工况分别进行数值模拟计算, 结果表明, 工况 1 模型中各单元均未发生屈服, 而工况 2 中所有单元均发生剪切屈服, 计算不收敛。

为了进一步分析正交各向异性屈服准则的特点, 对两种工况下各单元的 c, f 取值情况及工况 2 部分单元屈服面的单位法向量与第一主应力单位向量情况进行了对比分析, 见表 2 和表 3。由表 2 和表 3 分析可以看出, 在正交各向异性剪切屈服数值计算中, 各单元的 c, f 取值并不是常数, 与单元应力状态有关。由表 3 可以看出, 屈服面法向量与第二主应力单位向量并不一定垂直, 这是正交各向异性屈服准则与各向同性准则的一个重要区别。

表 2 两种工况下各单元 c, f 值

工况	单元号	c / MPa	f
1	3, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 25	0.71	0.56
	5, 6, 12, 16, 22, 23	0.78	0.60
	2, 26	0.84	0.66
	1, 4, 7, 8, 9, 19, 20, 21, 24, 27	0.94	0.71
	6, 7, 10, 14, 19, 24	0.50	0.40
2	5, 16, 20, 23	0.53	0.42
	1, 4, 8, 12, 18, 21, 22, 25, 27	0.54	0.43
	3, 9, 11, 13, 15	0.57	0.45
	17	0.59	0.47
	2, 26	0.65	0.52

表 3 工况 2 屈服面法向量与第二主应力向量关系
Table 3 The relationship between the normal vector of yield surface and intermediate principal stress vector in condition 2

单元号	屈服面单位法向量	第二主应力单位向量
1	(0.32, 0.56, 0.77)	(0.27, -0.61, -0.74)
5	(0.25, 0.43, 0.87)	(0.27, -0.89, -0.36)
9	(0.34, 0.06, 0.94)	(0.19, -0.88, 0.43)
14	(0.38, 0.32, 0.87)	(0.00, 0.69, -0.73)
21	(0.32, 0.12, 0.94)	(0.29, -0.88, -0.38)
26	(0.32, -0.12, 0.94)	(0.06, 0.60, -0.80)

6 结 论

(1) 以经典 Mohr-Coulomb 屈服准则为基础建立的各向异性屈服准则, 一般无法用显示表达式表示; 相应建立的正交各向异性准则与 3 个主应力均有关, 各向同性 Mohr-Coulomb 准则是其特例。

(2) 通过对 FLAC^{3D} 软件的二次开发, 按正交各向异性屈服准则进行数值分析时, 数值模型中各单元的凝聚力和摩擦系数将随着迭代过程中应力状态的改变而改变, 单元的剪切屈服情况不仅与外荷载的大小有关, 还与外荷载的方向有关。

参 考 文 献

- [1] JAEGER J C. Shear failure of anisotropic rocks[J]. *Geology Magazine*, 1960, 97: 65—72.
- [2] Pariseau W G. Plasticity theory for anisotropic rocks and soils[C]//Proceedings of the 10th Symposium on Rock Mechanics (AIME). New York: [s. n.], 1972: 267—295.
- [3] HOEK E, BROWN E T. Underground Excavation in Rock[M]. London: Institution of Mining and Metallurgy, 1980: 157—219.
- [4] NOVA R. The failure of transversely isotropic rocks in triaxial compression[J]. *International Journals of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, 1980, 17: 325—357.
- [5] CAZACU O, CRISTESCU N D, SHAO J F, et al. A new failure criterion for transversely isotropic rocks[J]. *International Journals of Rock Mechanics & Mining Science*, 1998, 35(1): 89—103.
- [6] DUVEAU G, SHAO J F. A modified single discontinuity theory for the failure of highly stratified rocks[J]. *International Journals of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 1998, 35(6): 807—820.
- [7] TIEN Y M, TSAO P F. Preparation and mechanical properties of artificial transversely isotropic rock[J]. *International Journals of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2000, 37(6): 1 001—1 012.
- [8] TIEN Y M, KUO M C. A failure criterion for transversely isotropic rocks[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 2001, 38(5): 399—412.
- [9] PIETRUSZCZAK S, MROZ Z. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor[J]. *Computers and Geotechnics*, 2000, 26: 105—112.
- [10] LYDZBA D, PIETRUSZCZAK S, SHAO J F. On anisotropic of stratified rocks: homogenization and fabric tensor approach[J]. *Computers and Geotechnics*, 2003, 30: 289—302.
- [11] 杨强, 陈新, 周维垣. 基于二阶损伤张量的节理岩体各向异性屈服准则[J]. *岩石力学与工程学报*, 2005, 24(8): 1 275—1 282.
YANG Qiang, CHEN Xin, ZHOU Wei-yuan. Anisotropic yield criterion for jointed rock masses based on a two-order damage tensor[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2005, 24(8): 1 275—1 282.
- [12] KANATANI K. Distribution of directional data and fabric tensors[J]. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 1984, 22: 149—164.
- [13] YANG Q, LI Z K, THAM L G. An explicit expression of second-order fabric-tensor dependent elastic compliance tensor[J]. *Mechanics Research Communications*, 2001, 28: 255—260.
- [14] 张贵科. 节理岩体正交各向异性等效力学参数与屈服准则研究及其工程应用[博士学位论文 D]. 南京: 河海大学, 2006.